

ZAKRES TEMATYCZNY CZ.1:

I. Liczby i działania.

- a) zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory,
- b) działania na liczbach rzeczywistych,
- c) obliczenia procentowe,
- d) wartość bezwzględna- obliczanie wartości wyrażeń z wartością bezwzględną, rozwiązywanie prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną,
- e) działania na potęgach o wykładniku całkowitym,
- f) działania na pierwiastkach.

II. Zbiory i przedziały liczbowe.

- a) wyznaczanie elementów zbioru liczbowego,
- b) wyznaczanie elementów sumy, iloczynu i różnicy zbiorów liczbowych (na diagramach i wypisując elementy),
- c) zapisywanie przedziałów za pomocą nierówności oraz nierówności w postaci przedziału liczbowego,
- d) zaznaczanie przedziału liczbowego na osi liczbowej,
- e) wyznaczanie sumy, iloczynu i różnicy przedziałów liczbowych.

III. Równania i nierówności.

- a) przekształcanie wyrażeń algebraicznych,
- b) wzory skróconego mnożenia,
- c) rozwiązywanie równań i nierówności liniowych,
- d) przekształcanie wzorów matematycznych i fizycznych,
- e) rozwiązywanie układów równań liniowych,
- f) rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań i nierówności,
- g) usuwanie niewymierności z mianownika, przekształcanie wyrażeń z pierwiastkami.

PRZYKŁADOWE ZADANIA.

I. LICZBY I DZIAŁANIA.

Zad. 1. a) Ze zbioru:

$\{5; 0; (1); \sqrt{2} - \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \pi; \sqrt{2} - 3,333\dots; 3,14; \sqrt{2^{-2}}; \sqrt{2}; -12\}$ wypisz liczby: --

- a) naturalne b) całkowite c) wymierne d) niewymierne

b) Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej: $\left|1\frac{1}{3} - \sqrt{2}\right|$.

Zad.2. Rower kosztował 800 zł, ale jego cenę obniżono o 15%, a następnie jeszcze o 10%. Ile teraz kosztuje ten rower?

Zad. 3. Zapisz w postaci jednej potęgi:

- a) $3^8 : 9^{-3}$ b) $10^{12} \cdot (10^2)^{-2}$

Zad. 4. a) Oblicz:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ 2) $(3\sqrt{2})^2$

b) Zapisz w jak najprostszej postaci:

a) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ b) $3\sqrt{24} + 2\sqrt{54} - \sqrt{150}$ c) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{147}}{\sqrt{3}}$

c) Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{6}{\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$, $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$, $\frac{1 + \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

II. ZBIORY I PRZEDZIAŁY LICZBOWE.

Zad. 1. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

Podaj elementy zbiorów: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Zad. 2 Wypisz elementy zbiorów:

$$A = \{x: x \in \mathbb{N}, x \text{ jest liczbą złożoną i } x < 9\}$$

$$B = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ i } x \text{ jest dzielnikiem liczby } 12\}$$

Następnie przedstaw te zbiory na diagramach i wyznacz zbiory:

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A.$$

Zad. 3 Zaznacz na osi liczbowej następujące zbiory i zapisz je.

a) $(-3; 5] \cap [-5; -1]$ b) $(-\infty; 4) \cup [2; 7)$ c) $[-4; 4) \setminus (2; 8]$ d) $(-1; 6] \setminus [4; \infty)$

III. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI.

Zad. 1. Wykonaj działania:

a) $3x^2 + (2 - x) - (-2x^3 - 3x) - (5x^2 + 3) =$ b) $(x^2 + 3x - 1)(2x - 1) =$

c) $(2a + 5)^2 =$ d) $(x - 2y)^2$ e) $(2x + 3)(2x - 3) =$

Zad. 2. Doprowadź do najprostszej postaci:

$$(a + 2b)^2 - (a - 3b)^2 + (2a + b)(2a - b) - 3(a + 2b) =$$

Zad. 3. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{8}{\sqrt{5} - 1}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$ c) $\frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 2}$

Zad. 4. Rozwiąż równanie:

a) $2x - 1 = 4 - 3x$ b) $x + 1 = 2(x + 1) - x$ c) $\frac{x+2}{9} + \frac{x-1}{3} = 1$

$$d) \frac{x+5}{2} - 2 = \frac{1}{3}(x+1) \quad e) \frac{5x-4}{6} - \frac{7-2x}{2} = 0 \quad f) \frac{15}{3-x} = \frac{7}{x} \quad g) \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+2}$$

Zad. 5. Rozwiąż nierówność:

$$a) 1 - 3x \geq 2 \quad b) -x + 4 > -3(x-1) \quad c) 2(x+1) < x - (3-x)$$

$$d)(x-3)(2x+1) \geq x^2 - 6x + 9 \quad e) (x-2)(2x+3) \leq x^2 - 4x + 4$$

$$f) \frac{2-x}{3} < x$$

Zad. 6. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania

$$a) \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Zad. 7. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników

$$a) \begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$$

Zad. 8. Rozwiąż układ równań dowolną metodą algebraiczną;

$$a) \begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x - 7y = -4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Zad. 9. 46 kilogramów jabłek zapakowano w 8 skrzynek o ładowności 5 kg i 7 kg.. Ile było skrzynek mniejszych, a ile większych, jeśli każda została wykorzystana maksymalnie?.

Zad. 10. 44 tony towaru przewieziono 9 samochodami o ładowności 4 tony i 6 ton. Ile było samochodów mniejszych, a ile większych, jeśli każdy został wykorzystany maksymalnie?.

ZAKRES TEMATYCZNY CZ.2:

I. Równania i nierówności.

- Równania kwadratowe.

II. Figury geometryczne.

- Kąty w trójkątach i czworokątach.
- Trójkąty i czworokąty- własności i obliczanie pola i obwodu.
- Twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowanie.
- Koła i okręgi – kąty w kole.

III. Funkcje.

- Pojęcie funkcji i sposoby jej opisu.
- Własności funkcji – odczytywanie własności funkcji z wykresu.
- Funkcja liniowa – jej wykres i własności.

IV. Własności funkcji kwadratowej.

- Funkcja kwadratowa – jej wykres i własności.
- Przesuwanie wykresu funkcji $f(x)=ax^2$.

- Postać ogólna, kanoniczna i iloczynowa funkcji kwadratowej.
- Nierówności kwadratowe.
- Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

PRZYKŁADOWE ZADANIA.

I. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI.

Zad. 1. Rozwiąż równanie:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $x^2-4=0$ | d) $5x^2-6x+6=0$ |
| b) $4x^2+12x=0$ | e) $-3x^2+7x-2=0$ |
| c) $x^2+10x+25=0$ | f) $x^4-5x^2+6=0$ |

II. FIGURY GEOMETRYCZNE.

Zad. 1. W trójkącie prostokątnym:

a,b – przyprostokątne, **c** – przeciwprostokątna.

Oblicz długość nieznanego boku tego trójkąta, jeżeli;

- | | |
|----------------|---------------|
| a) $a=5, b=12$ | b) $b=3, c=5$ |
|----------------|---------------|

Zad. 2. Sprawdź, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny.

- | | |
|------------|-----------|
| a) 9,40,41 | b) 5,9,11 |
|------------|-----------|

Zad. 3. Oblicz pole trójkąta równobocznego, gdy:

- a) długość boku jest równa $3\sqrt{2}$,
- b) wysokość jest równa 4,
- c) obwód jest równy 39.

Zad. 4.

- a) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, w którym podstawa ma długość 6, a ramię 10.
- b) Wysokość trójkąta równoramiennego poprowadzona do podstawy ma długość 6. Jaki obwód ma ten trójkąt, jeżeli jego pole jest równe 16?
- c) W okręgu o promieniu 8 poprowadzono cięciwę. Jaką długość ma ta cięciwa, jeżeli jej odległość od środka okręgu jest równa 6?
- d) W trójkącie równoramiennym o obwodzie 18 cm wysokość jest o 1 cm dłuższa od podstawy. Oblicz pole tego trójkąta.

Zad. 5. Oblicz wysokość rombu o przekątnych 6 cm i 8 cm.

Zad. 6. Oblicz pole rombu o boku 13 cm i dłuższej przekątnej 24 cm.

Zad. 7. Pole równoległoboku o bokach 6 cm i 16 cm jest równe 48 cm^2 . Znajdź wysokość i kąt równoległoboku.

Zad. 8. Suma miar kątów wpisanego i środkowego, opartych na tym samym łuku, jest równa 120° . Jakie miary mają te kąty?

Zad. 9. Na okręgu zaznaczono punkty K, L, M, N. Podzieliły one okrąg w stosunku $2 : 4 : 3 : 1$. Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta KLMN wpisanego w ten okrąg.

III. FUNKCJE.

Zad. 1. Przedstaw za pomocą tabelki funkcję: „Każdej liczbie całkowitej x takiej, że $-3 \leq x < 2$, przyporządkowano liczbę o cztery większą”. Narysuj wykres tej funkcji.

Zad. 2. Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 1$;

a) Narysuj wykres tej funkcji.

b) Oblicz miejsce zerowe funkcji.

c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu $x = -\frac{1}{2}$.

d) Określ monotoniczność funkcji.

e) Podaj współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.

f) Dla jakich argumentów wartości funkcji są:

- większe od 15,
- mniejsze od -5 ,
- dodatnie,
- ujemne.

g) Podaj przykład funkcji, której wykres jest prostą równoległą do danej funkcji.

Zad. 3.

a) Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty o współrzędnych: $(-1; 1)$, $(-2; 5)$.

b) Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = 3x + 2$ i przechodzi przez punkt $(-1; -2)$.

Zad. 4. Dane są funkcje:

$f: x \rightarrow 3x + 2$, $g: x \rightarrow -\frac{1}{2}x - 1$, $h: -2x + 3$.

Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresów funkcji g i h .

IV. WŁASNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ.

Zad. 1. Dana jest funkcja $y = x^2 - 5x + 6$

a) Sprowadź ją do postaci kanonicznej.

- b) Sprowadź ją do postaci iloczynowej.
c) Naszkicuj jej wykres.

Zad. 2. Naszkicuj parabolę oraz określ jej własności: $y = -x^2 + 2x + 3$

1. D_f
2. W_f
3. Miejsca zerowe:
4. Współrzędne wierzchołka.
5. Oś symetrii.
6. Przedziały monotoniczności funkcji.
7. Przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz ujemne.
8. Określ jaką wartość osiąga funkcja, minimalną czy maksymalną oraz podaj tę wartość.

Zad. 3. Rozwiąż nierówności.

- a) $x^2 + 5x < 0$ b) $-4x^2 + x \geq 0$ c) $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$
d) $2x^2 + 7x - 4 > 0$ e) $x^2 + 5 > 3x$ f) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Zad. 4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale.

- a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, $x \in [-2, 2]$ b) $f(x) = -3x^2 - 6x - 2$, $x \in [1, 2]$.

ZAKRES TEMATYCZNY CZ.3:

I. Wielomiany.

- Działania na wielomianach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, stosowanie wzorów skróconego mnożenia na kwadrat sumy, kwadrat różnicy, różnicę kwadratów).
- Rozkład wielomianu na czynniki:
 - wyłączanie czynnika poza nawias,
 - grupowanie wyrazów,
 - stosowanie wzorów skróconego mnożenia,
 - rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki w zależności od wyróżnika Δ .
- Rozwiązywanie równań wielomianowych.

II. Funkcje wykładnicze i logarytmy.

- Rysowanie wykresu funkcji $f(x) = a^x$ oraz przesunięcie tego wykresu wzdłuż osi Ox i Oy .
- Określanie własności funkcji wykładniczej.
- Obliczanie wartości logarytmów dziesiętnych i naturalnych z zastosowaniem wzorów na logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi o wykładniku naturalnym.

III. Funkcje trygonometryczne.

- Definicje funkcji \sin , \cos , tg , ctg kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
- Wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 30° , 45° , 60° .
- Stosowanie definicji funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań geometrycznych.
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne:
 - obliczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, znając wartość jednej z nich,
 - przekształcanie wyrażeń z zastosowaniem tożsamości trygonometrycznych – proste przykłady.

IV. Ciągi.

- Obliczanie wyrazów ciągu.
- Badanie monotoniczności ciągu.
- Ciąg arytmetyczny.
- Ciąg geometryczny.
- Procent składany.

PRZYKŁADOWE ZADANIA.

I. WIELOMIANY.

Zad. 1. Dane są wielomiany: $u(x)=4x^3+2x^2-1$, $w(x)=2x^3-x^2+2$, $p(x)=3x-4$.

Wyznacz wielomian v :

a) $v(x) = u(x) + 3 w(x)$

c) $v(x) = p(x) \cdot w(x)$

b) $v(x) = 2 u(x) - w(x)$

d) $v(x) = [p(x)]^2 - 3 u(x)$

Zad.2. Wykonaj działania:

a) $(2x + 1)^2$

b) $(4 - 5x)^2$

c) $(3x - 4)(3x + 4)$

d) zapisz wielomian w prostszej postaci

$$(x + 2)^2 + 12x(x + 1) - 2(3x + 2)^2 - (2x + 3)(2x - 3) =$$

Zad. 3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^3 - 5x^2 + 6x =$

b) $4x^2 - 16 =$

c) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 =$

d) $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 =$

e) $4x^3 - x =$

Zad.4. Rozwiąż równania:

a) $(2x-1)(x+2)(3x+2)(x-1)^2=0$

c) $-x^2 + 3x + 18 = 0$

b) $x^3 - 3x + 21 = 7x^2$

d) $x^5 - 121x^3 = 0$

e) $x^3 + 5x = 0$

II. FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMY.

Zad. 1. Naskicuj wykres funkcji: a) $f(x) = 2^x$ b) $f(\frac{1}{3})^x$.

Określ dziedzinę, zbiór wartości oraz monotoniczność podanych funkcji.

Zad. 2. Oblicz:

a) $\log_3 9 =$ $\log_{16} \frac{1}{4} =$ $\log_{\frac{1}{5}} 25 =$ $\log_4 2 =$

b) $\log_3(2 + \log_4 0,25)$

c) $\log 5 + \log 8 - 2 \log 2$

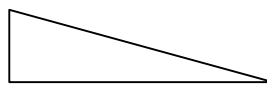
III. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE.

Zad. 1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych trójkąta prostokątnego o podanych bokach.

- a) 3,4,5 b) 6,8,10 c) 8,15,17 d) 7,24,25

Zad. 2. Podaj wartości

$\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta$



dla trójkąta przedstawionego na rysunku.

Zad. 3. Podaj przybliżoną wartość kąta, dla którego:

- a) $\sin \alpha = 0,4067$, b) $\sin \alpha = 0,4220$, c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5751$ d) $\cos \alpha = 0,9200$

Zad. 4. Znajdź obwód prostokąta, którego przekątna d tworzy z krótszym bokiem kąt o mierze α , jeżeli: a) $d=10$, $\alpha=67^\circ$, b) $d=15$, $\alpha=75^\circ$.

Zad. 5. Obserwator widzi czubek drzewa odległego o d , pod kątem α . Przyjmując, że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią, oblicz wysokość drzewa, mając dane:

- a) $d=65$ m, $\alpha = 29^\circ$, b) $d=22$ m, $\alpha = 30^\circ$ c) $d=100$ m, $\alpha = 45^\circ$.

Zad. 6. Drabinę o długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka ściany na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?

Zad. 7. Pod jakim kątem padają promienie słoneczne, jeśli drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m?

Zad. 8. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych, znajdź wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeśli:

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ b) $\cos \alpha = 0,8$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ d) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{5}$

Zad. 9. Przedstaw w prostszej postaci.

- a) $(1-\sin \alpha)(1+\sin \alpha)$ c) $\sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ e) $\frac{1-\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$
b) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$ d) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{\cos \alpha}{1+\sin \alpha}$ f) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$

Zad. 10. Sprawdź, czy poniższe równości są tożsamościami trygonometrycznymi.

- a) $(\operatorname{tg} \alpha - 1)(\operatorname{ctg} \alpha + 1) = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$ e) $\sin^3 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^3 \alpha - \sin^5 \alpha$
b) $(\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ f) $\frac{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$
c) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha$ g) $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

Zad. 11. Podstawy trapezu mają 10 i 4. Ramiona trapezu tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz wysokość i pole trapezu.

IV. CIĄGI.

Zad. 1. Wzór ogólny ciągu liczbowego o wyrazach

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \quad \text{ma postać:}$$

A. $a_n = \frac{n}{2}$ B. $a_n = \frac{n}{n+1}$ C. $a_n = \frac{1}{n}$

Zad. 2 Wyznacz wzór ogólny podanego ciągu:

a) arytmetycznego; 6, 2, -2, -6, -10, Oblicz a_{10} .

b) geometrycznego; -4, -2, -1, $-\frac{1}{2}$, Oblicz a_{11} .

Zad. 3. Wyznacz cztery początkowe wyrazy ciągu:

a) $a_n = 2n - 1$, b) $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$.

Zad. 4. Które wyrazy ciągu (a_n) :

a) są równe 0, $a_n = (n - 3)(n + 2)$

b) są równe 1, $a_n = \frac{n^2 - 6n + 13}{n + 3}$.

c) są większe od -4, $a_n = -n^2 + 3n$

Zad. 5. W ciągu arytmetycznym mamy dane:

a) $S_n = -24$, $a_n = 12$, $n = 2$. Oblicz a_1 .

b) $S_n = 168$, $a_1 = 3$, $a_n = 25$. Oblicz n .

c) $a_1 = 5$, $r = -2$. Oblicz a_9 .

Zad. 6. Sprawdź, czy ciąg $a_n = 4 - \frac{1}{2}n$ jest ciągiem arytmetycznym. Określ jego monotoniczność.

Zad. 7. W ciągu geometrycznym mamy dane:

a) $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$. Oblicz S_n .

b) $a_1 = 3$, $a_2 = 6$. Oblicz a_5 i a_{10} .

c) $S_5 = 45$, $q = 2$. Oblicz a_1 .

Zad. 8. Sprawdź, czy ciąg $a_n = 2^{3n-1}$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

Zad. 9. Dla jakich x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu:

a) arytmetycznego, $-x$; $3x + 1$; $-6 - x$

b) geometrycznego, x ; $x + 1$, $2x + 2$

Zad. 10. Do banku wpłacono 2000 zł na 2 lata przy rocznej stopie procentowej 6%. Oblicz, jaki będzie stan tej lokaty po upływie tego okresu, jeżeli odsetki są kapitalizowane:

- a) co pół roku,
- b) co kwartał,
- c) co miesiąc.

ZAKRES TEMATYCZNY CZ.4:

I. Figury i przekształcenia. Wielokąty i figury podobne.

- Symetria osiowa i środkowa.
- Przekształcenia w układzie współrzędnych.
- Figury w układzie współrzędnych.
- Równanie prostej i równanie okręgu.
- Proste równoległe i proste prostopadłe.
- Wielokąt wpisany w okrąg.
- Wielokąt opisany na okręgu.
- Wielokąty podobne. Cechu podobieństwa figur.
- Twierdzenie Talesa i jego zastosowanie.

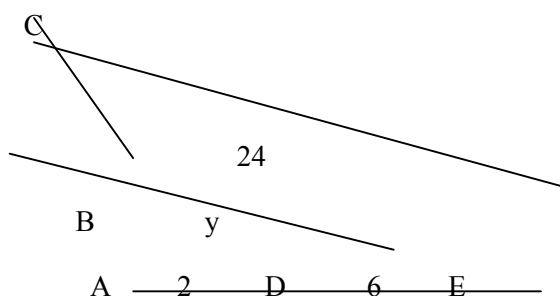
II. Statystyka.

- Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta.
- Średnia ważona.
- Wariancja i odchylenie standardowe.

PRZYKŁADOWE ZADANIA.

I. FIGURY I PRZEKSZTAŁCENIA. WIELOKĄTY I FIGURY PODOBNE.

Zad. 1. Oblicz długość odcinka y , wiedząc, że $BD \parallel CE$.



Zad. 2. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy $R=4\sqrt{3}$. Oblicz długość boku tego trójkąta.

Zad. 3. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy $r=6$. Oblicz długość boku tego trójkąta.

Zad. 4. Oblicz pole i obwód kwadratu opisanego na okręgu o promieniu 3.

Zad. 5. Oblicz pole i obwód kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 8

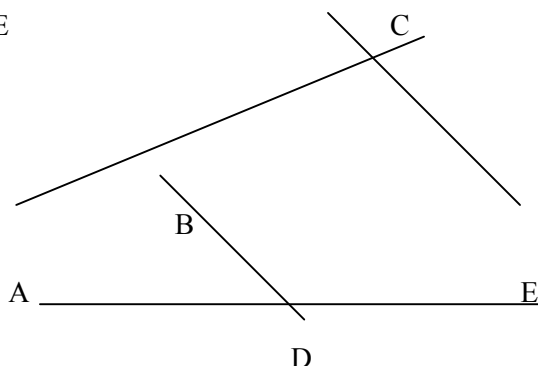
Zad. 6. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta A'B'C'. Kąty przy wierzchołkach C i C' są proste. Najdłuższy bok trójkąta A'B'C' ma długość 75, a dwa krótsze boki trójkąta ABC mają długości 7 i 24. Oblicz skalę podobieństwa tych trójkątów.

Zad. 7. $BD \parallel CE$

Oblicz długość odcinka AD,

jeśli $|AB|=3,6\text{cm}$, $|AC|=5,4\text{cm}$,

$|DE|=1,2\text{cm}$.



Zad. 8. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Wiadomo, że $|\angle BAC| = 80^\circ$. Oblicz miarę kąta BOC.

Zad. 9. Napisz równanie prostej równoległej do $y=2x-3$ przechodzącej przez punkt $P=(-2,1)$.

Zad. 10. Napisz równanie prostej prostopadłej do $y=-4x+2$ i przechodzącej przez punkt $P=(0,-2)$.

Zad. 11. Oblicz odległość punktu A od środka odcinka BC, gdzie $A=(3,6)$, $B=(1,3)$, $C=(-3,-2)$.

Zad. 12. Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową AD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty $A=(-2,-1)$, $B=(7,10)$, $C=(6,1)$.

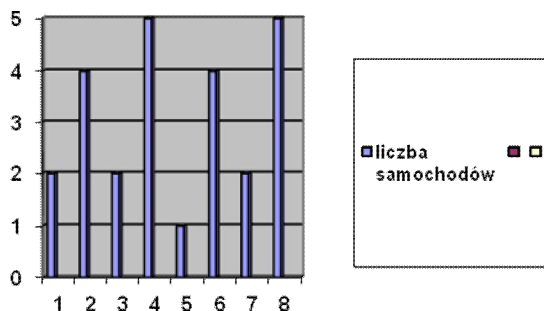
Zad. 13. Napisz równanie okręgu ośrodku w punkcie $S=(2,-1)$ i promieniu $\sqrt{7}$.

Zad. 14. Wyznacz środek i promień okręgu o równaniu: $x^2+y^2-6x+2y+8=0$

Zad. 15. Wyznacz równanie okręgu stycznego do osi OY, którego środkiem jest punkt $S=(5,-3)$.

II. STATYSTYKA.

Zad. 1. Diagram przedstawia liczbę samochodów sprzedawanych w ciągu kilku dni w pewnym salonie samochodowym



Na podstawie tego wykresu oblicz:

a) średnią liczbę sprzedanych samochodów w ciągu dnia,

- b) medianę sprzedanych samochodów,
c) dominantę sprzedanych samochodów.

Zad. 2. W pewnej szkole przy wystawianiu ocen semestralnych stosowana jest średnia ważona. Tabela zawiera oceny Adama.

Rodzaj oceny	Praca klasowa	Kartkówka	Praca projektowa
waga	5	4	1
oceny	4, 5	1, 3	6, 4

Jaką ocenę otrzyma Adam na semestr?

Zad. 3. Średnia arytmetyczna liczb: $x - 4$; 3 ; $x - 5$; $x + 2$; 3 jest równa 1 . Jaka jest najmniejsza z tych liczb?

Zad. 4. W zestawie danych: $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 7, 7$. Określ

- a) medianę b) modę c) średnią arytmetyczną

Zad. 5. W tabeli zapisano, ile rodzeństwa mają uczniowie klasy III.

Liczba rodzeństwa	1	2	3	4
Liczba osób	6	8	4	2

Oblicz odchylenie standardowe dla tego zestawu danych. Wynik zaokrąglij do $0,01$.

Zad. 6. W czteroosobowej grupie zawodników średnia wieku jest równa 20 lat. Kiedy do grupy dołączył Olek, średnia wieku wzrosła o rok. Ile lat ma Olek?

ZAKRES TEMATYCZNY CZ.5:

I. Wyrażenia wymierne.

- Określanie dziedziny wyrażenia wymiernego.
- Skracanie wyrażeń wymiernych.
- Działania na wyrażeniach wymiernych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie).
- Równania wymierne.

II. Prawdopodobieństwo.

- Własności prawdopodobieństwa.
- Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń.
- Reguła mnożenia.

III. Stereometria.

- Własności oraz obliczanie pól i obwodów figur płaskich.
- Graniastopy – własności, obliczanie pola powierzchni i objętości.
- Ostrosłupy - własności, obliczanie pola powierzchni i objętości.

PRZYKŁADOWE ZADANIA.

I. WYRAŻENIA WYMIERNE.

Zad. 1. Dane są wielomiany: $u(x)=4x^3 + 2x^2 - 1$, $w(x)=2x^3 - x^2 + 2$, $p(x)=3x - 4$.

Wyznacz wielomian v :

a) $v(x) = u(x) + 3 w(x)$

c) $v(x) = p(x) \cdot w(x)$

b) $v(x) = 2 u(x) - w(x)$

d) $v(x) = [p(x)]^2 - 3 u(x)$

Zad.2. Wykonaj działania:

a) $(2x + 1)^2$

b) $(4 - 5x)^2$

c) $(3x - 4)(3x + 4)$

d) zapisz wielomian w prostszej postaci

$$(x + 2)^2 + 12x(x + 1) - 2(3x + 2)^2 - (2x + 3)(2x - 3) =$$

Zad. 3. Rozłóż wielomian na czynniki.

a) $x^3 - 5x^2 + 6x =$

b) $4x^2 - 16 =$

c) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 =$

d) $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 =$

e) $4x^3 - x =$

Zad.4. Rozwiąż równania:

a) $(2x-1)(x+2)(3x+2)(x-1)^2=0$

c) $-x^2 + 3x + 18 = 0$

b) $x^3 - 3x + 21 = 7x^2$

d) $x^5 - 121x^3 = 0$

e) $x^3 + 5x = 0$

Zad. 5. Określ dziedzinę wyrażeń wymiernych.

a) $\frac{1}{x+1}$,

d) $\frac{x^2}{x^2 - 5x + 6}$,

g) $\frac{1}{x^2 + 3x + 4}$,

b) $\frac{2x-1}{x^2-1}$,

e) $\frac{x+1}{2x+6}$,

h) $\frac{x^4+2}{x^4-16}$.

c) $\frac{x-5}{x^2}$,

f) $\frac{1}{x^2+1}$,

Zad. 6. Skróć wyrażenia wymierne. Napisz potrzebne założenia.

a) $\frac{3x^2}{2x}$,

e) $\frac{a+ab}{a+ac}$,

i) $\frac{2x^3+8x^2+8x}{10x^2+20x}$,

b) $\frac{12y^3}{15y}$,

f) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$,

j) $\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$,

c) $\frac{5z^2-3z}{4z^3-z^2}$,

g) $\frac{t^2-1}{t-1}$,

k) $\frac{x^2+2x-15}{2x^2+2x-24}$.

d) $\frac{4t^4+10t^3}{6t^2-8t^3}$,

h) $\frac{1-a}{a-1}$,

Zad. 7 Wykonaj działania. Podaj założenia.

$$a) \frac{x+1}{2x+3} + \frac{x+2}{2x+3} = \quad e) \frac{x-2}{3x+3} + \frac{2x+1}{2x+2} = \quad i) \frac{x+1}{x^2-2x+1} + \frac{3}{4x-4} =$$

$$j) \frac{4x+1}{x^2-3x} - \frac{5}{2x-6} = \quad j) \frac{2x+1}{3x^2-12} - \frac{x-1}{2x^2+4x} = \quad \frac{2x-8}{x^2-8x+16} - \frac{3x-16}{2x^2-32} =$$

$$a) \frac{x}{4x+4} + \frac{x+1}{6x-6} - \frac{x^2+1}{3x^2-3} = \quad c) \frac{3}{4x^2-10x+4} + \frac{2}{1-4x^2} - \frac{1}{4x^2-12x+8} =$$

$$b) \frac{x}{x^2-6x-16} - \frac{x-3}{x^2-8x} + \frac{x+4}{4x^2+8x} =$$

$$a) \frac{3x-5}{x^2+3x} \cdot \frac{2x^2-7x}{6x-10} = \quad d) \frac{2x-4}{3x+9} \cdot \frac{2x-1}{5x-10} \div \frac{4x-2}{15x+45} =$$

$$b) \frac{4x^2-9}{4x-9} \div \frac{4x^2+12x+9}{9-4x} = \quad e) \frac{2x^2+x-3}{2x^2+2x-24} \div \frac{2x+3}{4x^2-12x} \div \frac{x^2-x}{x+4} =$$

$$c) \frac{x^2+x-6}{x+5} \div \frac{x-2}{x^2+2x-15} = \quad f) \frac{2x-2}{x-2} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-4} \cdot \frac{5x+5}{x-5} =$$

Zad. 8. Rozwiąż równania.

$$a) \frac{2x+1}{x-2} = 3, \quad b) \frac{3x+4}{x+2} = \frac{x+8}{x+5}, \quad c) \frac{x^2-2x+7}{x+2} = 2, \quad d) \frac{4}{x+3} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x-5}{x^2+4x+3},$$

$$\frac{3x-2}{2x+1} = -2, \quad \frac{-3x+4}{x-1} = \frac{4}{x-4} - 3, \quad \frac{3x^2+7x+4}{x+1} = 5, \quad \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+2}{x-4} = \frac{18}{x^2-5x+4},$$

$$\frac{-x+3}{4x-5} = \frac{2}{3}, \quad \frac{x+1}{2x+3} = \frac{2x+1}{3x+2}, \quad \frac{2z-3}{x^2-4x+4} = -1, \quad \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x^2-1},$$

$$\frac{3x-5}{-6x+7} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{x+5}{2x-6} = \frac{2x-7}{3x-9}, \quad \frac{4x+6}{2x^2+x-3} = 4, \quad \frac{x-1}{x-3} + \frac{x+10}{x-4} + \frac{2}{x^2-7x+12} = 0.$$

Zad. 9 Dane jest wyrażenie wymierne $W(x) = \frac{x+2}{x-a}$, o którym wiadomo, że $W(2) = W(-3)$. Wyznacz liczbę a .

II. PRAWDOPODOBIENSTWO.

Zad. 1. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn oczek uzyskanych w obu rzutach wyniesie co najmniej 30.

Zad. 2. Ze zbioru $\{2,4,5,6,7,8,9,11,12,15,16,20\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest parzysta lub podzielna przez 4.

Zad. 3. Rzucono 5 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że reszka lub orzeł wypadły co najmniej jeden raz.

Zad. 4. Z talii 52 kart losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano trefla lub damę.

Zad. 5.

a) Zdarzenia A i B są zdarzeniami losowymi takimi, że $A \subset B$ oraz $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$.

Oblicz $P(A \cup B)$.

b) A i B są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω takimi, że $P(A) = \frac{2}{13}$, $P(B) = \frac{7}{13}$ i $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Oblicz prawdopodobieństwo iloczynu tych zdarzeń.

Zad. 6. W urnie są 2 kule czerwone, 3 białe i 5 zielonych. Losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyjmijemy kule różnych kolorów.

Zad. 7. Asia, Krysia, Ewa i Natalia poszły do kina.

- Na ile sposobów mogą zająć wykupione miejsca na widowni?
- Oblicz prawdopodobieństwo, że Ewa i Natalia usiadły koło siebie.

Zad. 8. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ustawiając w przypadkowej kolejności litery: A,A,A,A,K,N,R, ułożymy słowo KARAWANA?

III. STEREOMETRIA.

Zad. 1.

- Oblicz pole trójkąta równoramiennego w którym ramię ma długość 20 a wysokość 15.
- Oblicz pole trójkąta równobocznego o wysokości 8.
- Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej 12.

Zad. 2. Dany jest trapez prostokątny o kącie ostrym α , dłuższej podstawie a, krótszej podstawie b i wysokości h. Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu, jeśli:

a) $\alpha = 60^\circ$, a = 8 cm, h = $6\sqrt{3}$ cm,

b) $\alpha = 30^\circ$, b = 10 cm, h = 4 cm,

Zad. 3. Podstawy trapezu mają 10 i 4. Ramiona trapezu tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60° . Oblicz wysokość i pole trapezu.

Zad. 5. Przekątna prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Podstawa prostopadłościanu jest kwadratem o boku 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego prostopadłościanu.

Zad. 6. Oblicz pole powierzchni i objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość $\sqrt{10}$ cm. Przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° .

Zad. 7. Oblicz objętość i kąt nachylenia ściany bocznej do wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 6 cm wiedząc, że jego pole powierzchni całkowitej jest równe 96 cm^2 .

Zad. 8. Przekątna prostopadłościanu jest nachylona do podstawy pod kątem 30° i ma długość 12 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wiedząc, że jedna z krawędzi podstawy ma długość 6 cm.

Zad. 9. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 108 cm^2 , a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa ma 72 cm^2 . Oblicz objętość ostrosłupa i kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.